MINISTERE DE L'EQUIPEMENT, DU LOGEMENT
DE L'AMENAGEMENT DU TERRITOIRE ET DES
TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1988

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (temps accordé: 4 heures)

NOTATIONS

$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$: ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{R}_+$: ensemble des réels positifs et du nombre zéro.
$\mathbb{R}_+^*$: ensemble des réels strictement positifs.
$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels positifs et du nombre zéro.
$\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers naturels strictement positifs.
Ln désigne la fonction logarithme népérien.
La notation $\prod_{p=1}^{N} a_p$ symbolise le produit $a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_N$.

RESULTATS UTILISABLES SANS DEMONSTRATION

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, n! (factorielle n) = 1x2x....xn est équivalent, au voisinage de $+\infty$, à $\sqrt{2\pi}.\, n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}$.

b) Une fonction réelle f définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si:

$$\forall\, (x,y,\lambda) \in I \times I \times [0,1],\ f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

c) Une fonction réelle dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ est convexe sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée est monotone croissante (au sens large) sur I.

PARTIE I

Soit ϕ la fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^*$ par:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\,\mathrm{sht}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{sht}}{t}\right) = \frac{1}{2t^2}\left\{\frac{t}{\mathrm{tht}} - 1\right\}$$

I.1-a) Montrer que ϕ a une limite quand t tend vers zéro. On prolonge alors ϕ par continuité au point 0.

b) Donner un équivalent simple de $\phi(t)$ au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, ϕ admet un développement limité à l'ordre 2N - 1 au voisinage de zéro.

Dans toute la suite du problème, ce développement limité sera noté:

$$\phi(t) = \sum_{\ell=1}^{N} (-1)^{\ell-1}.C_\ell.t^{2(\ell-1)} + \varepsilon_N(t).t^{2N-1} \qquad \text{où} \quad \lim_{t\to 0} \varepsilon_N(t) = 0.$$

Montrer que les coefficients C_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}^*$, sont dans $\mathbb{Q}$. Donner effectivement les valeurs de C_1 et C_2.

I.2-a) Montrer que ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On pourra s'aider du fait que le signe de $\frac{d\phi}{dt}(t)$ est le même sur $\mathbb{R}_+^*$ que celui de:

$$\psi(t) = \mathrm{ch}2t - \frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}2t - t^2 - 1$$

b) Tracer l'allure du graphe de ϕ dans un repère orthonormé (unité 10 cm sur les deux axes).

PARTIE II

II.1- Pour quelles valeurs du nombre réel x l'intégrale impropre:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}.dt \quad \text{est-elle convergente ?}$$

II.2-a): C est une constante réelle quelconque strictement positive. Montrer que la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}.dt$$

ainsi que toutes les fonctions Γ_C définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$\Gamma_C(x) = C^x \int_0^{+\infty} e^{-t}.t^{x-1}.dt \quad \text{sont convexes.}$$

b) Déduire de la convexité des fonctions Γ_C que pour tout triplet de réels $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times [0,1]$, on a:

$$(0)\quad \forall\, C \in \mathbb{R}_+^* :\ 0 < \Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \lambda\Gamma(x).\{C^{x-y}\}^{1-\lambda} + (1-\lambda)\Gamma(y).\frac{1}{\{C^{x-y}\}^{\lambda}}$$

Calculer la borne inférieure du 3ème membre des inégalités (0) lorsque (x,y,λ) étant fixé, C parcourt $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire:

$$(1)\ \forall\, (x,y,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times [0,1] :\ 0 < \Gamma(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqslant \{\Gamma(x)\}^{\lambda}.\{\Gamma(y)\}^{1-\lambda}$$

et vérifier que (1) traduit la convexité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\mathrm{Ln}\Gamma$.

c) Etablir que pour tout x réel strictement positif, on a:

$$(2)\quad \Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$$

Calculer $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On admettra, dans la suite du problème, que Γ est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées:

(c_1) $\mathrm{Ln}\Gamma(1) = 0$
(c_2) $\mathrm{Ln}\Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$
(c_3) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{Ln}\Gamma(x+1) - \mathrm{Ln}\Gamma(x) = \mathrm{Ln}x$

Tournez la page S.V.P.

II.3-a) Pour quelles valeurs du nombre réel x l'intégrale impropre:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2xt}\phi(t)dt$$

est-elle convergente ? On désignera par μ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$\mu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2xt}.\phi(t).dt$$

b) Montrer que μ est convexe.

c) Montrer que sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f définie par:

$$f(x) = (x-\tfrac{1}{2})\mathrm{Ln}x - x$$

est convexe.

II.4-a) Etablir que pour tout $\omega > 0$, l'intégrale impropre:

$$J(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega t} - e^{-t}}{t}.dt$$

est convergente.

b) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $G(x) = \int_{\omega x}^{x} \frac{e^{-u}}{u}\,du$

(ω est un réel donné strictement positif).

Montrer que: $\forall\ (\epsilon,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\int_{\epsilon}^{x} \frac{e^{-\omega t} - e^{-t}}{t}\,dt = G(\epsilon) - G(x)$

En déduire:

(3) $J(\omega) = -\mathrm{Ln}\omega$

c) Vérifier, en intégrant par parties, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a:

(4) $\mu(x+1) - \mu(x) = -(x+\frac{1}{2}).\mathrm{Ln}(1+\frac{1}{x}) + 1$

(on pourra écrire: $\mu(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2xt}.\frac{1}{2\mathrm{sh}t}.\frac{d}{dt}(\frac{\mathrm{sh}t}{t}).dt$)

II.5-a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} \mu(x)$.

b) On pose : $\Gamma^*(x) = \exp((x-\frac{1}{2}).\mathrm{Ln}x - x + \mu(x))$

Vérifier que $\mathrm{Ln}\Gamma^*$ est convexe et que $\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathrm{Ln}\Gamma^*(x+1) - \mathrm{Ln}\Gamma^*(x) = \mathrm{Ln}x$$

c) Montrer, en utilisant la caractérisation de la fonction Γ donnée dans l'encadré de la page 3, que la suite de terme général:

$$\mathrm{Ln}\Gamma^*(n+1) - \mathrm{Ln}\Gamma(n+1)$$

n parcourant $\mathbb{N}$, est constante. Calculer cette constante en utilisant un équivalent de n! à l'infini.

En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a:

(5) $\mathrm{Ln}\Gamma(x) = \mathrm{Ln}\{\sqrt{\frac{2\pi}{x}}.(\frac{x}{e})^x\} + \mu(x)$

****

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail